PART4 定積分の性質

要点 ① 定積分の性質

一般に，定積分について，次の性質が成り立つ。

定積分の性質Ⅰ

1 $\displaystyle\int_a^b kf(x)dx=k\int_a^b f(x)dx$ （k は定数）

2 $\displaystyle\int_a^b \{f(x)+g(x)\}dx=\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx$

3 $\displaystyle\int_a^b \{f(x)-g(x)\}dx=\int_a^b f(x)dx-\int_a^b g(x)dx$

上記の定積分の性質は，関数 $f(x)$，$g(x)$ の不定積分の 1 つをそれぞれ $F(x)$，$G(x)$ とおくことで証明することができる。

これらの性質を用いることで，定積分の計算を「項ごと」に行うことができる。

例

$$\begin{aligned}\int_2^4 (x^2-6x+8)dx&=\int_2^4 x^2\,dx-6\int_2^4 xdx+8\int_2^4 dx\\&=\left[\frac{1}{3}x^3\right]_2^4-6\left[\frac{1}{2}x^2\right]_2^4+8\Big[x\Big]_2^4\\&=\frac{1}{3}(4^3-2^3)-\frac{6}{2}(4^2-2^2)+8(4-2)\\&=\frac{56}{3}-36+16\\&=-\frac{4}{3}\end{aligned}$$

また，積分区間が同じ定積分を 1 つにまとめることができる。

例

$$\begin{aligned}\int_1^2 (2x-5)dx+\int_1^2 (x+4)dx&=\int_1^2 \{(2x-5)+(x+4)\}dx\\&=\int_1^2 (3x-1)dx\end{aligned}$$

要点 ② 定積分の上端と下端に関する性質

一般に，定積分の上端と下端に関して，次の性質が成り立つ。

定積分の性質Ⅱ

4 $\displaystyle\int_a^a f(x)dx=0$

5 $\displaystyle\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx$

6 $\displaystyle\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$

※性質 **6** は，a，b，c の大小に関わらず成り立つ。

上記の性質は，関数 $f(x)$ の不定積分の 1 つを $F(x)$ とおくことで証明することができる。

これらの性質を用いることで，積分区間の上端と下端の入れ替えや，積分区間の連結を行うことができる。

例 $\displaystyle\int_2^2 (3x^2+x-2)dx=$

$\displaystyle\int_1^{-3} (5x^2-4x)dx=\int\quad(5x^2-4x)dx$

$\displaystyle\int_{-1}^{1} (2x^2+5)dx+\int_1^2 (2x^2+5)dx=\int\quad(2x^2+5)dx$

4 次の定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_{1}^{1}(3x^2-5x)dx$　　(2) $\displaystyle\int_{-2}^{1}(3x^2-x+2)dx-\int_{2}^{1}(3x^2-x+2)dx$

Point Pickup

定積分の性質

1 $\displaystyle\int_a^b kf(x)dx=k\int_a^b f(x)dx$　(k は定数)

2 $\displaystyle\int_a^b \{f(x)+g(x)\}dx=\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx$

3 $\displaystyle\int_a^b \{f(x)-g(x)\}dx=\int_a^b f(x)dx-\int_a^b g(x)dx$

4 $\displaystyle\int_a^a f(x)dx=0$

5 $\displaystyle\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx$

6 $\displaystyle\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$

性質 **1** ~ **3** を用いることで，定積分の計算を「項ごと」に行うことができ，
性質 **4** ~ **6** を用いることで，積分区間の上端と下端の入れ替えや，積分区間の連結を行うことができる。

第18講 PART4 確認問題

次の定積分を求めよ。

1 $\int_{2}^{2}(x^2+x)dx=$ ア

2 $\int_{-3}^{2}(2x^2+3x-4)dx-\int_{3}^{2}(2x^2+3x-4)dx=$ イウ

PART4 定積分の性質

4 次の定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_{1}^{1}(3x^2-5x)dx$　　(2) $\displaystyle\int_{-2}^{1}(3x^2-x+2)dx-\int_{2}^{1}(3x^2-x+2)dx$

[解答]

(1) $\displaystyle\int_{1}^{1}(3x^2-5x)dx=0$

(2)
$$\int_{-2}^{1}(3x^2-x+2)dx-\int_{2}^{1}(3x^2-x+2)dx$$
$$=\int_{-2}^{1}(3x^2-x+2)dx+\int_{1}^{2}(3x^2-x+2)dx$$
$$=\int_{-2}^{2}(3x^2-x+2)dx$$
$$=3\int_{-2}^{2}x^2\,dx-\int_{-2}^{2}xdx+2\int_{-2}^{2}dx$$
$$=3\left[\frac{1}{3}x^3\right]_{-2}^{2}-\left[\frac{1}{2}x^2\right]_{-2}^{2}+2\Big[x\Big]_{-2}^{2}$$
$$=\{2^3-(-2)^3\}-\frac{1}{2}\{2^2-(-2)^2\}+2\{2-(-2)\}$$
$$=(8+8)-\frac{1}{2}(4-4)+2(2+2)=16-0+8=24$$

第 18 講　PART4 確認問題 解答

1

[正解] ア：0

[解説]

$$\int_{2}^{2}(x^2+x)dx=0$$ [A]

[A] $\int_{a}^{a}f(x)dx=0$

2

[正解] イウ：12

[解説]

$$\int_{-3}^{2}(2x^2+3x-4)dx-\int_{3}^{2}(2x^2+3x-4)dx$$

$$=\int_{-3}^{2}(2x^2+3x-4)dx+\int_{2}^{3}(2x^2+3x-4)dx$$ [B]

$$=\int_{-3}^{3}(2x^2+3x-4)dx$$ [C]

$$=2\int_{-3}^{3}x^2dx+3\int_{-3}^{3}xdx-4\int_{-3}^{3}dx$$ [D]

$$=2\left[\frac{1}{3}x^3\right]_{-3}^{3}+3\left[\frac{1}{2}x^2\right]_{-3}^{3}-4\left[x\right]_{-3}^{3}$$

$$=\frac{2}{3}\{3^3-(-3)^3\}+\frac{3}{2}\{3^2-(-3)^2\}-4\{3-(-3)\}$$

$$=\frac{2}{3}(27+27)+\frac{3}{2}(9-9)-4(3+3)$$

$$=36+0-24$$

$$=12$$

[B] $\int_{a}^{b}f(x)dx=-\int_{b}^{a}f(x)dx$

[C] $\int_{a}^{b}f(x)dx=\int_{a}^{c}f(x)dx+\int_{c}^{b}f(x)dx$

[D] $\int_{a}^{b}kf(x)dx=k\int_{a}^{b}f(x)dx$　（k は定数）

$\int_{a}^{b}\{f(x)+g(x)\}dx=\int_{a}^{b}f(x)dx+\int_{a}^{b}g(x)dx$

$\int_{a}^{b}\{f(x)-g(x)\}dx=\int_{a}^{b}f(x)dx-\int_{a}^{b}g(x)dx$